§2･4 複素ベクトルと複素行列

複素数 complex number を成分とするベクトルや行列を考えよう．複素数 α は２つの実数 a,b と虚数単位 i （$i^2=-1$） を用いて $\alpha=a+bi$ のように表わされる．複素数 $\alpha=a+bi$ の共役複素数は $\overline{\alpha}=a-bi$ である．α の大きさ $|\alpha|$ は $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ を満たす．

$\overline{(\overline{\alpha})}$ は簡単に $\overline{\overline{\alpha}}$ と表わすが， $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$ である．

複素数の全体を C で表わす.

まず，複素数を成分とする３項の列ベクトルを考える．その元は $\mathbf{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 i \\ x_2+y_2 i \\ x_3+y_3 i \end{pmatrix}$

（$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ は実数）のように表わされる．その全体を C^3 で表わし，R^3 の場合に準じて，C^3 においても加法とスカラー倍（スカラーは複素数とする）を演算として**複素数ベクトル空間** vector space over C の構造を導入する.

$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_t \in C^3$ が

$$\alpha_1\mathbf{z}_1+\alpha_2\mathbf{z}_2+...+\alpha_t\mathbf{z}_t=\mathbf{0}\ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t \in C) \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_t=0$$

を満たすとき，$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_t$ は１次独立であるという.

$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in C^3$ は $\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3=\mathbf{0}$ （$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in C$）ならば

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ であるから，基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は１次独立である.

ところで，複素ベクトルにおいて，スカラーを実数に限ると，例えば

$\mathbf{z}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2=\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1+2i \end{pmatrix} \in C^3$ は実数をスカラーとして１次独立である．しかし,

$i\mathbf{z}_1=i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1+2i \end{pmatrix}=\mathbf{z}_2$ であるから，$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ は（複素数をスカラーとして）１次従属

である.

ベクトル$\mathbf{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 i \\ x_2+y_2 i \\ x_3+y_3 i \end{pmatrix}$の**共役ベクトル**$\overline{\mathbf{z}}$ は $\overline{\mathbf{z}}=\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \overline{z_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-y_1 i \\ x_2-y_2 i \\ x_3-y_3 i \end{pmatrix}$で定める．

２つの複素ベクトル$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$の**複素内積** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ （あるいは $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ）は

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1\overline{v_1}+u_2\overline{v_2}+u_3\overline{v_3}$$

で定義する．

C^3 における複素内積について次が成り立つ．
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\overline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}$
$(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}$
$(\alpha\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\alpha(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot(\overline{\alpha}\mathbf{v})$
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$ しかも $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0\Leftrightarrow\mathbf{u}=\mathbf{0}$

ベクトル$\mathbf{u}$の大きさ（あるいは***ノルム***） $\|\mathbf{u}\|$ を $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ で定義する．

C^3 におけるノルムについて次が成り立つ．
$\|\mathbf{u}\|\geq 0$ しかも $\|\mathbf{u}\|=0\Leftrightarrow\mathbf{u}=\mathbf{0}$
$\lvert\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\rvert\leq\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ （シュヴァルツ Schwarz の不等式）
$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$ （三角不等式）

複素数を成分とするn次の行列の全体を $M_n(C)$ とおく． その元を **複素行列** という． $M_n(C)$は行列の加法と乗法について環をなす．複素行列 $A=(\alpha_{ij})$ に対して，その各成分 α_{ij} を共役複素数 $\overline{\alpha_{ij}}$ で置き換えて得られる行列を $\overline{A}$ とおく． $\overline{({}^tA)}={}^t(\overline{A})$であるが更に， $\overline{({}^tA)}=A^*$ と書く． A^*をAの**随伴行列** adjoint matrix という．

複素行列の随伴行列について，次の式が成り立つ．

$$\left(A^*\right)^* = A$$

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

$$(\alpha A)^* = \alpha A^*$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

特に，この記号を用いると，複素ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ の複素内積 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ は

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + u_3\overline{v_3} = \overline{{}^t\mathbf{v}}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{u}$ と表わされる．

複素行列 $A = \left(\alpha_{ij}\right)$ が $A^* = A$ を満たすとき，A を**エルミット行列** Hermitian matrix という．また，A が $A^* = -A$ を満たすとき，A は**交代**（または**歪**）**エルミット行列** skew-Hermitian matrix という．

$$A^* = A \Leftrightarrow {}^tA = \overline{A} \Leftrightarrow \alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \quad (\forall i, j)$$

$$A^* = -A \Leftrightarrow {}^tA = -\overline{A} \Leftrightarrow \alpha_{ji} = -\overline{\alpha_{ij}} \quad (\forall i, j)$$

例えば，$\begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 5 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 2 & i & 2+i \\ -i & -1 & 3 \\ 2-i & 3 & -2 \end{pmatrix}$ はエルミット行列であり，また

$\begin{pmatrix} 0 & 3+i \\ -3+i & 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 0 & i & 2+i \\ i & 2i & 3 \\ -2+i & -3 & 3i \end{pmatrix}$ は交代エルミット行列である．

複素行列 $A = \left(\alpha_{ij}\right)$ が $A^* = A^{-1}$ を満たすとき，A を**ユニタリ行列** unitary matrix という．

$$A^* = A^{-1} \Leftrightarrow AA^* = I \Leftrightarrow A^*A = I$$

３次行列 A がユニタリ行列であるのは，A の３つの列ベクトルのノルムがすべて１であ

り，異なる２つの列ベクトルの複素内積が０であることである．

同様のことが３つの行ベクトルについてもいえる．

例えば，$\begin{pmatrix} \cos\theta - i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix}$ や $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -i & \sqrt{2}\,i \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & i & -\sqrt{2}\,i \end{pmatrix}$ はユニタリ行列である．

問 2•4

(1) $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)E$ である．虚数単位 i に行列 J を対応させ，複素数 $z = a + bi$ に 行列 $aE + bJ = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ を対応させる．この対応を f で表わすとき，複素数 z_1, z_2 について次を示せ．

① $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$

② $f(z_1 - z_2) = f(z_1) - f(z_2)$

③ $f(z_1 z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$

(2) 任意の正方複素行列は，エルミート行列と交代エルミート行列の和として１通りに表すことができることを示せ．また，特に $\begin{pmatrix} 1+2i & 2+3i \\ 3+4i & 4+5i \end{pmatrix}$ の場合を求めよ．

(3) $U = \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ がユニタリ行列になるように複素数α, β を定めよ．

(4) $Q = \begin{pmatrix} \dfrac{i}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1-i}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{i}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを示し，その逆行列を求めよ．