第４章　１次写像と２次形式

4.1　１次写像

座標平面上の各点$\mathrm{P}(x,y)$にある点$\mathrm{P'}(x',y')$を対応させているとしよう．この対応を平面から平面への**写像** mapping という．これを記号fを用いて，

$$f:(x,y)\mapsto(x',y') \qquad \text{または} \qquad \mathrm{P'}=f(\mathrm{P})$$

のように表わす．点$\mathrm{P'}$を変換fによる点Pの**像** image という．点P，$\mathrm{P'}$の位置ベクトルをそれぞれ

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{p'}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

で表わすと，この写像はベクトル$\vec{p}$をベクトル$\overrightarrow{p'}$に対応させる写像とみることもできる．このとき，同じfを用いて$\overrightarrow{p'}=f\left(\vec{p}\right)$とも表わす．

写像fによりベクトル$\vec{p}$が$\overrightarrow{p'}$に移され，さらに写像gにより$\overrightarrow{p'}$が$\overrightarrow{p''}$に移されるとき，

$$\overrightarrow{p''}=g\left(\overrightarrow{p'}\right)=g(f(\vec{p}))$$

となる．このとき$\vec{p}$を$\overrightarrow{p''}$に対応させる写像をfとgの**合成写像** composite といい，$g\circ f$で表わす．すなわち

$$(g\circ f)(\vec{p})=g(f(\vec{p}))$$

である．

点Pをそれ自身P対応させる写像は**恒等写像**　identity mapping といい，i　で表わす．

変換f,gについて，合成変換$g\circ f$と$f\circ g$が共に恒等写像　i　になるとき，gをfの**逆写像** inverse mapping といい，f^{-1}で表わす．すなわち，$f(\vec{p})=\overrightarrow{p'}$のとき，$f^{-1}\left(\overrightarrow{p'}\right)=\vec{p}$である．

平面上のベクトルを平面上のベクトルへ移す写像

$$f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \overrightarrow{p'}=f(\vec{p})$$

において，x',y'がx,yの一次式

$$\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}\quad(a,b,c,d\ \text{は定数})$$

で表わされるとき，写像fを**線形写像**または**１次写像** linear mapping という．この式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

と書けるので，一次写像は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ただし、} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で表わされる．行列 A を**一次写像 f を表わす行列**という．また f を**行列 A の表わす１次写像**という．

f が１次写像ならば、任意のベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ と実数 k について $f(\vec{p}+\vec{q}) = f(\vec{p}) + f(\vec{q})$，　$f(k\vec{p}) = kf(\vec{p})$ 逆に，この２式を同時にみたす写像 f は１次写像になる．

証明　１次写像 f を表わす行列を A とする．任意のベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ と実数 k について，

$$f(\vec{p}+\vec{q}) = A(\vec{p}+\vec{q}) = A\vec{p} + A\vec{q} = f(\vec{p}) + f(\vec{q})$$

$$f(k\vec{p}) = A(k\vec{p}) = k(A\vec{p}) = kf(\vec{p})$$

逆に，この２式を同時にみたす変換 f について，$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像を

$f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とすると，$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$　の像　$f\left(\vec{p}\right) = \overrightarrow{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は

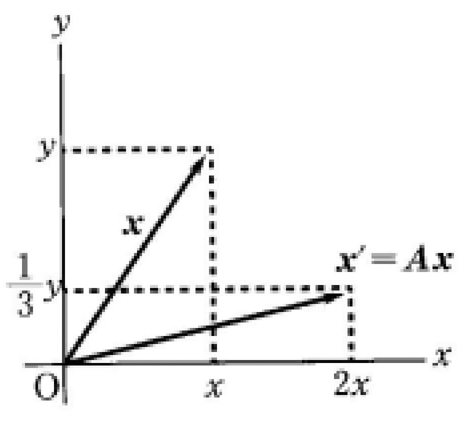
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}\right) = f\left(x\overrightarrow{e_1}\right) + f\left(y\overrightarrow{e_2}\right) = xf\left(\overrightarrow{e_1}\right) + yf\left(\overrightarrow{e_2}\right) = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

であるから，f は一次写像である．（終）

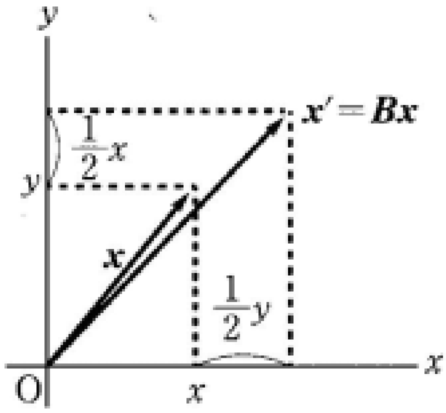
平面のベクトル　**x**　に　**x**’を対応させる１次写像　**x**’= A **x**　を図で示そう．

まず，A　が対角行列，例えば　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$　のとき、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　から　$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$

であるので，行列　A　はｘ軸方向に２倍に拡大し，ｙ軸方向に　$\frac{1}{3}$　倍に縮小する写像を表わしている．



また，$B=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ のとき，$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}y\\ \frac{1}{2}x+y\end{pmatrix}$ であるから，対応の様子は次の図のようである．



恒等写像 i を表わす行列は単位行列 $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である．

１次写像 f, g について, 合成写像 $g\circ f$ も１次写像であり，f, g を表わす行列を A, B とすると，$g\circ f$ を表わす行列は BA である。

１次写像 f で逆写像をもつのは，f を表わす行列 A が逆行列をもつ（A が正則）ときであり，そのとき逆写像 f^{-1} を表わす行列は A の逆行列 A^{-1} である．

証明　まず，任意の $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in R^2$ について，$i(\mathbf{p})=\mathbf{p}=I\,\mathbf{p}$ である．次に，f, g が一次写像のとき，任意のベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ と実数 k について

$$(g\circ f)(\mathbf{p}+\mathbf{q})=g(f(\mathbf{p}+\mathbf{q}))=g(f(\mathbf{p})+f(\mathbf{q}))$$
$$=g(f(\mathbf{p}))+g(f(\mathbf{q}))=(g\circ f)(\mathbf{p})+(g\circ f)(\mathbf{q})$$
$$(g\circ f)(k\mathbf{p})=g(f(k\mathbf{p}))=g(kf(\mathbf{p}))=kg(f(\mathbf{p}))=k(g\circ f)(\mathbf{p})$$

であるから，合成写像 $g\circ f$ が１次写像である．またその表わす行列は,

$$(g\circ f)(\mathbf{p})=g(f(\mathbf{p}))=B(f(\mathbf{p}))=B(A\mathbf{p})=(BA)\mathbf{p}$$

から，BA であることがわかる．

１次写像 f が逆写像 g をもつとき，$g\circ f=i$ と $f\circ g=i$ から g も１次写像であることを示す．

任意のベクトル $\mathbf{p}', \mathbf{q}'$ とスカラー k について，$g(\mathbf{p}')=\mathbf{p},\ g(\mathbf{q}')=\mathbf{q}$ とおく．このとき，$f(\mathbf{p})=\mathbf{p}',\ f(\mathbf{q})=\mathbf{q}'$ であり，f は１次変換だから

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{q})=f(\mathbf{p})+f(\mathbf{q})=\mathbf{p}'+\mathbf{q}',\ f(k\mathbf{p})=kf(\mathbf{p})=k\mathbf{p}'$$

従って，$g(\mathbf{p}'+\mathbf{q}')=\mathbf{p}+\mathbf{q}=g(\mathbf{p}')+g(\mathbf{q}'),\ g(k\mathbf{p}')=k\mathbf{p}=kg(\mathbf{p}')$ が成り立ち，g は１次写

像である．そこで，f と g の表わす行列をそれぞれ A, B とすると，$AB = I = BA$ であることから，$B = A^{-1}$ であり，g を表わす行列は A の逆行列 A^{-1} であるといえる．（終）

点 $\mathrm{P}(x, y)$ を原点のまわりに θ だけ回転した点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に移す写像 f_θ は，次の線形写像で表わされる．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

その逆写像 f^{-1} は，原点のまわりの $-\theta$ だけの回転である．即ち，$f_\theta^{-1} = f_{-\theta}$ である．
また，$f_{\alpha+\beta} = f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta$ がなりたつ．

証明　原点のまわりの角 θ だけ回転移動 f_θ が１次写像であることは，図を使って

$$f_\theta(\vec{p} + \vec{q}) = f_\theta(\vec{p}) + f_\theta(\vec{q}), \quad f_\theta(k\vec{p}) = kf_\theta(\vec{p})$$

を示すことで分かる．同じく $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転すると $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ である．
従って，先の証明から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の像は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる．
後半は意味を考えると明らかである．（終）

写像 $f{:}R^3 \to R^2$ （あるいは $f{:}R^2 \to R^3$）が，任意のベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ と実数 k について

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(k\,\mathbf{x}) = k\, f(\mathbf{x})$$

を満たすとき，f を１次写像という．
$f{:}R^3 \to R^2$ が１次写像のとき，f を表す行列は２×３型であり，$f{:}R^2 \to R^3$ が１次写像のとき，f を表わす行列は３×２型である．
写像 $f{:}R^3 \to R^3$ が任意のベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ と実数 k について

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(k\,\mathbf{x}) = k\, f(\mathbf{x})$$

を満たすとき，f を１次写像または空間 R^3 の１次変換という．$f{:}R^3 \to R^3$ が１次写像のとき，f を表わす行列は３×３型である．
写像 $f : R^2 \to R^1 = R$ や 写像 $f : R^3 \to R$ あるいは
写像 $f : R \to R^2$ や 写像 $f : R \to R^3$ もありえる．

写像が $f{:}R^2 \to R^2$ のときは，同じ平面の写像だから，特に f は平面の**変換** transformation という．同様に写像 $f{:}R^3 \to R^3$ は空間の変換という．これらの変換が 1 次写像であれば，**１次変換**または**線形変換**という．**単位変換**，**逆変換**，**合成変換**という用語も同様に使おう．

例えば

写像 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x$ は空間の点の x 軸への正射影である 1 次写像である．

写像　$f: x \to \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ は R から R^2 への１次写像である．

写像　$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は空間の点のｘｙ平面への正射影である１次写像である．

写像　$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ はｘｙ平面の点を空間の点へ移す１次写像である．

変換　$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ は空間の点のｘｙ平面に関する対称移動である１次変換である．

変換　$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ は空間の点のｘ軸の周りの 180°回転である１次変換である．

変換　$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ は空間の点の原点に関する対称移動である１次変換である．

変換　$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$ は空間の点のｚ軸のまわりの θ だけの回転である．

平面上の変換 f は点 P を点 $\mathrm{P}' = f(\mathrm{P})$ に移した．平面上のいろいろな図形 G を点集合とみて， f による G の像 $\mathrm{G}' = f(\mathrm{G}) = \{ f(\mathrm{P}) \mid \mathrm{P} \in \mathrm{G} \}$ を考えることができる．

平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転する線形変換で，ｘ軸は直線 $y = x$ に，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ は双曲線 $2xy = 1$ に移される．

m, n, p, q は２または３であるとし， $f{:}R^n \to R^m$， $g{:}R^p \to R^n$， $h{:}R^q \to R^p$ はそれぞれ１次写像であるとする．それらを表わす行列を順に A, B, C とすると，A は $m \times n$ 型，B は $n \times p$ 型，C は $p \times q$ 型である．合成写像 $f \circ g : R^p \to R^m$ を表わす行列は AB であり，合成写像 $g \circ h : R^q \to R^n$ を表わす行列は BC である．従って，等しい合成写像

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) : R^q \to R^m$$

を表わす行列 $(AB)C$ と $A(BC)$ は等しい．

これは，行列の積の結合法則の自然な証明である．

m,n は２または３とし，$f:R^n \to R^m$ は１次写像とする． 　$\mathrm{Im}(f)=\{f(\mathbf{x})\,|\,\mathbf{x}\in R^n\}$　（f の**像** image という） 　$\mathrm{Ker}(f)=\{\mathbf{x}\,|\,f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\}$　（f の**核** kernel という） とおく． 　$\mathrm{Im}(f)$ は R^m の部分空間をなし，$\mathrm{Ker}(f)$ は R^n の部分空間をなす．

証明　任意の $\mathbf{a},\mathbf{b}\in \mathrm{Im}(f)$ とスカラー k をとる．$\mathbf{a}=f(\mathbf{x}),\mathbf{b}=f(\mathbf{y})$ を満たす $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^m$ が存在する．$\mathbf{x}+\mathbf{y},\ k\mathbf{x}\in R^m$ だから $\mathbf{a}+\mathbf{b}=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})=f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\in \mathrm{Im}(f)$ また $k\mathbf{a}=kf(\mathbf{x})=f(k\mathbf{x})\in \mathrm{Im}(f)$ をえる．これで $\mathrm{Im}(f)$ は R^m の部分空間であることが示された．

次に，任意の $\mathbf{x},\mathbf{y}\in \mathrm{Ker}(f)$ とスカラー k をとる．$f(\mathbf{x})=\mathbf{0},\ f(\mathbf{y})=\mathbf{0}$ だから，

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}\quad \text{また}\quad f(k\mathbf{x})=kf(\mathbf{x})=k\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

である．ゆえに $\mathbf{x}+\mathbf{y},\ k\mathbf{x}\in \mathrm{Ker}(f)$ であり，$\mathrm{Ker}(f)$ は R^n の部分空間をなすことが示された．（終）

計算例　１次変換 $f:R^3\to R^3,\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto \mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{pmatrix}$ について f の像と核を求めよう．f の表わす行列を $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ とし，その A の第 i 列のベクトルを $\mathbf{a}_i$ とおく $(i=1,2,3)$．$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$ の像が $f(\mathbf{x})=xf(\mathbf{e}_1)+yf(\mathbf{e}_2)+zf(\mathbf{e}_3)$ $=x\mathbf{a}_1+y\mathbf{a}_2+z\mathbf{a}_3$ より $\mathrm{Im}(f)=\{f(\mathbf{x})\,|\,\mathbf{x}\in R^3\}$ は $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ で張られる．ここで $\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$ であり，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ は１次独立だから，f の像 $\mathrm{Im}(f)$ は基底を $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ とする２次元の部分空間である．

次に，A に行基本変形を行うと，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\to\ldots\to B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ となるので

$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ を $z=t$ とおいて解くと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$

は基底を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする１次元の部分空間である．

２次の直交行列 A で表わされる線形変換 f を**直交変換** orthogonal transformation という．

平面の１次変換 f について，次の条件は同値である． ①　f は直交変換である． ②　f はベクトルの大きさを変えない，即ち，$\lvert f(\mathbf{p})\rvert = \lvert\mathbf{p}\rvert$ である． ③　f はベクトルの内積を変えない，即ち，$f(\mathbf{p})\cdot f(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$ である．

証明　①＝＞③＝＞②＝＞①の順に示す．f を表わす行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．

①＝＞③：A は直交行列だから ${}^tAA=E$ をみたすので

$$f(\mathbf{p})\cdot f(\mathbf{q}) = A\mathbf{p}\cdot A\mathbf{q} = {}^t(A\mathbf{p})(A\mathbf{q}) = ({}^t\mathbf{p}\,{}^tA)(A\mathbf{q}) = {}^t\mathbf{p}({}^tAA)\mathbf{q} = {}^t\mathbf{p}E\mathbf{q} = {}^t\mathbf{p}\mathbf{q} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$$

即ち，$f(\mathbf{p})\cdot f(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$ である．

③＝＞②：$\lvert f(\mathbf{p})\rvert^2 = f(\mathbf{p})\cdot f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = \lvert\mathbf{p}\rvert^2$ より $\lvert f(\mathbf{p})\rvert = \lvert\mathbf{p}\rvert$ である．

②＝＞①：$\mathbf{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について $\lvert f(\mathbf{p})\rvert = \lvert\mathbf{p}\rvert$ とする．$f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ だから

$$(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = x^2+y^2$$

$$\therefore (a^2+c^2)x^2 + 2(ab+cd)xy + (b^2+d^2)y^2 = x^2+y^2$$

これが任意の x, y について成り立つから

$$a^2+c^2=1,\ ab+cd=0,\ b^2+d^2=1$$

従って，A は直交行列であり，f は直交変換となる．

練習問題 4.1

(1) 次の写像 f は１次変換か．

①　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$　　　②　$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

③ $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_2$　　　④ $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2 \end{pmatrix}$

(2)　次の線形変換を表わす行列を求めよ.

① $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x - 3y \end{pmatrix}$　　　② $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ -x \end{pmatrix}$

③ $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 4y - z \\ x + y \end{pmatrix}$　　　④ $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z + x \end{pmatrix}$

(3)　①　１次写像 $f : R^3 \to R^2$，$x \mapsto Ax$ によって

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

となるとき，行列 A を求めよ.

②　f を R^2 からそれ自身への線形写像で，

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

を満たすものとする．$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と表現したときの行列 A を求めよ.

③　ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に移す線形変換を表わす行列を求めよ.

(4)　R^2 の線形写像 f, g, h をそれぞれ

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\quad g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},\quad h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

とする．次の合成写像を求めよ.

$$f \circ g,\quad h \circ f,\quad h \circ g,\quad g \circ h,\quad h \circ h$$

(5)　次の１次変換の逆変換があればそれを求めよ.

① $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　　　② $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$