4.4　２次曲線と２次曲面

２変数の２次形式

$$F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$$

の係数行列を A とする．

A は対称行列であるから，ある直交行列 T によって対角化可能である．即ち，A の固有値を α,β とし，$D=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ とおくと ${}^tTAT=D$ となる．これから

$$A=({}^tT)^{-1}DT^{-1}=TDT^{-1}=TD\,{}^tT$$

である．　ここで $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}={}^tT\mathbf{x}$　とおくと

$$F(\mathbf{x})={}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}={}^t\mathbf{x}TD\,{}^tT\mathbf{x}={}^t({}^tT\mathbf{x})D(T\mathbf{x})={}^t\mathbf{x}'D\mathbf{x}'$$

$$=(x'\ y')\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\alpha x'^2+\beta y'^2$$

となる．変数 x',y' を使えば 2 次形式の $x'y'$ の項が出てこない．この式を元の 2 次形式の**標準形** normal form，canonical form という．

３変数の２次形式

$$F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2fxy+2gyz+2hzx$$

の場合も同じである．係数行列を A とし，その固有値を α,β,γ する．ある直交行列 T によって　${}^tTAT=D=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$ と対角化される．$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$，$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}={}^tT\mathbf{x}$　とおくと，

$$F(\mathbf{x})={}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}={}^t\mathbf{x}TD\,{}^tT\mathbf{x}={}^t({}^tT\mathbf{x})D({}^tT\mathbf{x})={}^t\mathbf{x}'D\mathbf{x}'$$

$$=(x'\ y'\ z')\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\alpha x'^2+\beta y'^2+\gamma z'^2$$

のように，$F(x,y,z)$ を標準形にすることができる．

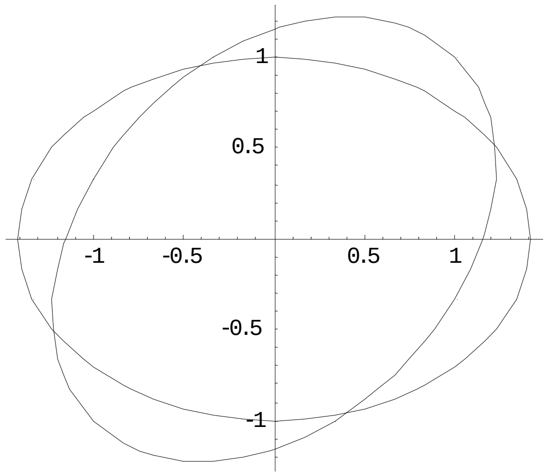
計算例１　２次形式 $3x^2-2xy+3y^2$ の標準形を求める．
また２次曲線 $C:3x^2-2xy+3y^2=4$ がどのような曲線か調べる．

対応する対称行列を A とおくと，$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ であり，その固有値は $\lambda=2,4$ であ

る．それぞれに対応する固有ベクトルは $\mathbf{p}_1 = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} (c_1 \neq 0, c_2 \neq 0)$ なので，大きさ１の固有ベクトル $\mathbf{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ をえる．そこで直交行列を

$T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおき，$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = {}^tT\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\\ \frac{-x+y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと，標準形は $2x'^2 + 4y'^2$ となる．すなわち，$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2x'^2 + 4y'^2$　である．

さて，$T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$ となるので，T は原点の周りの $\dfrac{\pi}{4}$ の回転の１次変換 f を表わす．$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$ と変換すると $C: 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ は $C': 2x'^2 + 4y'^2 = 4$ 即ち $\dfrac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$ である．楕円 C' の点 $\mathrm{P}'(x', y')$ は f によって C の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に移されるから，C は楕円であることが分かる．



計算例２　２次形式 $F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}(x + y)$ の標準形を求める．

まず，２次の項 $x^2 - 2xy + y^2$ の係数行列から $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とおく．その固有値は 0，2 であり，それらに対応する単位固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ である．上と

同じ $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ によって $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}={}^tT\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\\ \frac{-x+y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと，$\mathbf{x}=T\mathbf{x}'$ によって，$x^2-2xy+y^2=0x'^2+2y'^2=2y'^2$ となる．さらに，$F(x,y)=x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}(x+y)=2(y'^2-4x')$ より２次曲線 $F(x,y)=0$ は 放物線 である．

> 一般の２次曲線　$F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ に対して
>
> $A=\begin{pmatrix}a & h\\ h & b\end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{pmatrix}$ とおく．A の固有値を λ_1,λ_2 とする．
>
> $\underline{rank(A)=2}$　即ち $|A|=\lambda_1\lambda_2\neq 0$ のとき，平行移動と回転によって標準化して，$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{|\hat{A}|}{|A|}=0$ の形に導くことができる．このことから $F(x,y)=0$ は 楕円・双曲線・交わる２直線・空集合のいずれかを表わす．
>
> $\underline{rank(A)=1}$　即ち，固有値の１つが０のとき，放物線・平行な２直線・１直線・空集合を表す．
>
> $\underline{rank(A)=0}$　即ち $A=O$ のとき，１直線・空集合を表す．

$rank(A)=2$ のときの解説：$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}g\\ f\end{pmatrix}$ とおくと，$F(x,y)={}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}+2{}^t\mathbf{b}\mathbf{x}+c$ である．まず，１次の項を消去するため $\mathbf{x}=\mathbf{X}+\mathbf{x}_0$ と平行移動をする．ただし，$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ とおく．このとき $F(x,y)={}^t(\mathbf{X}+\mathbf{x}_0)A(\mathbf{X}+\mathbf{x}_0)+2{}^t\mathbf{b}(\mathbf{X}+\mathbf{x}_0)+c$ である．

その２次の項は ${}^t\mathbf{X}A\mathbf{X}$ である．

その１次の項は ${}^t\mathbf{X}A\mathbf{x}_0+{}^t\mathbf{x}_0A\mathbf{X}+2{}^t\mathbf{b}\mathbf{X}$ である．

ここで ${}^t\mathbf{X}A\mathbf{x}_0$ はスカラーであり，${}^t\mathbf{X}A\mathbf{x}_0={}^t({}^t\mathbf{X}A\mathbf{x}_0)={}^t\mathbf{x}_0A\mathbf{X}$ より

$${}^t\mathbf{X}A\mathbf{x}_0 + {}^t\mathbf{x}_0 A\mathbf{X} + 2\,{}^t\mathbf{b}\mathbf{X} = 2({}^t\mathbf{x}_0 A + {}^t\mathbf{b})\mathbf{X}$$ である．従って ${}^t\mathbf{x}_0 A + {}^t\mathbf{b} = {}^t\mathbf{0}$ となるよう

即ち $A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ となるように，即ち $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ は $\begin{cases} ax_0 + hy_0 + g = 0 \\ hx_0 + by_0 + f = 0 \end{cases}$ を満たすよう

にとる．それは，$|A| \neq 0$ だから可能である．

その定数項は ${}^t\mathbf{x}_0 A\mathbf{x}_0 + 2\,{}^t\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + c$ である．

$${}^t\mathbf{x}_0 A\mathbf{x}_0 + 2\,{}^t\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + c = ({}^t\mathbf{x}_0 A + {}^t\mathbf{b})\mathbf{x}_0 + {}^t\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + c = {}^t\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + c = gx_0 + fy_0 + c$$

$$\begin{aligned}|\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ ax_0 + hy_0 + g & hx_0 + by_0 + f & gx_0 + fy_0 + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ 0 & 0 & gx_0 + fy_0 + c \end{vmatrix} \\ &= (gx_0 + fy_0 + c)|A|\end{aligned}$$

$|A| \neq 0$ より　定数項は $\dfrac{|\hat{A}|}{|A|}$ である．

従って，$F(x,y) = F(X,Y) = {}^t\mathbf{X}A\mathbf{X} + \dfrac{|\hat{A}|}{|A|}$ であり，${}^t\mathbf{X}A\mathbf{X} = aX^2 + 2hXY + bY^2$ の部分は，適当な直交行列 T によって標準化できる．

計算例３　２次形式 $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2yz - 2zx$ の標準形を求める．

対応する対称行列を A とおくと，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ であり，その固有値は $\lambda = 0,1,3$ である．それぞれに対応する固有ベクトルは $\mathbf{p}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = c_3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, c_3 \neq 0)$ だから，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}$ と

おくと $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ を代入して $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2yz - 2zx = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}'D\mathbf{x}' = 0x'^2 + y'^2 + 3z'^2$

計算例４　１次の項を含む２次形式 $2xy - 6x + 10y + z - 31$ の標準形を求め，
２次曲面 $S: 2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$ がどのような曲面か調べる．

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，与えられた２次形式は ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} + {}^t\mathbf{b}\mathbf{x} - 31$

と表わせる．A の固有値 $1, -1, 0$ に対する長さ１の固有ベクトルを列ベクトルとして直交

行列 T を $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．A を T で変換した行列を D とすると，

$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と対角化される．$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^tT\mathbf{x}$ とおく．$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$ から

$x = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}, z' = z$ を代入して

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} + {}^t\mathbf{b}\mathbf{x} - 31 &= {}^t\mathbf{x}'D\mathbf{x}' + {}^t\mathbf{b}\,{}^tT\mathbf{x}' + 31 = x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' + z' - 31 \\ &= (x' + \sqrt{2})^2 - (y' + 4\sqrt{2})^2 + z' - 1 \end{aligned}$$

平行移動 $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ をすると，標準形 $X'^2 - Y'^2 + Z'$ を得る．

２次曲面 $S: 2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$ は上の変換で，$S': X'^2 - Y'^2 + Z' = 0$ に移される．曲面 $Z = -X^2 + Y^2$ は，双曲放物面として知られている．

２次曲面　$F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2fxy+2gyz+2hzx+2px+2qy+2rz+d=0$

に対して $A=\begin{pmatrix} a & f & h \\ f & b & g \\ h & g & c \end{pmatrix}$，$\hat{A}=\begin{pmatrix} a & f & h & p \\ f & b & g & q \\ h & g & c & r \\ p & q & r & d \end{pmatrix}$ とおき，A の固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ とする．

$\underline{|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0}$ のとき，適当な平行移動と直交変換によって標準化して，この曲面は

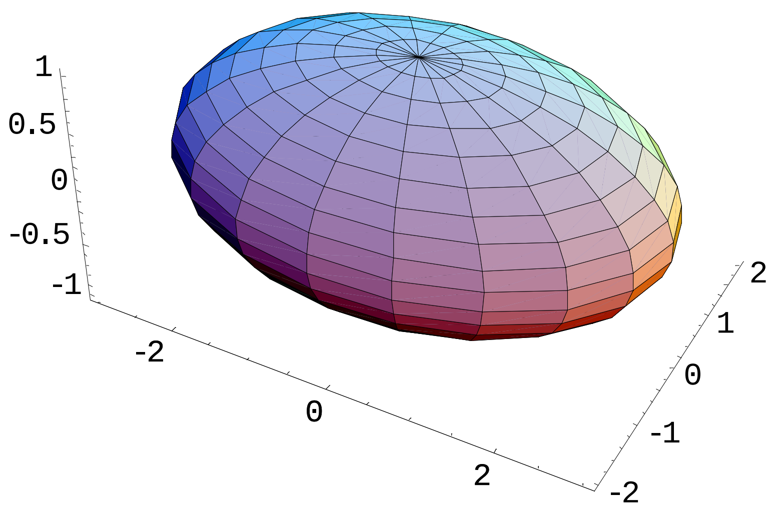
$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+\dfrac{|\hat{A}|}{|A|}=0$　の形に導くことができる．このとき１葉双曲面・２葉双曲面・楕円面・２次錐面・空集合のいずれかを表わす．

$\underline{\lambda_1\lambda_2\neq 0,\lambda_3=0}$ のとき，　$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+kz'=0$ に導かれる場合は双曲放物面・楕円放物面のいずれかで，$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+k=0$ の形に導かれるとき，楕円柱面・双曲柱面・交わる２平面・空集合のいずれかを表わす．

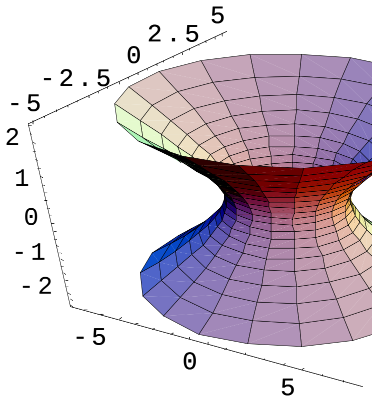
$\underline{\lambda_1\neq 0,\lambda_2=\lambda_3=0}$ のとき，$\lambda_1 x'^2+ky'+lz'+m=0$ の形に導かれ，放物柱面・平行２平面・重なった２平面のいずれかを表わす．

次の各曲面は Mathematica によって描いたものである．

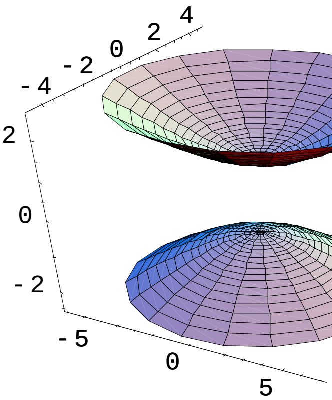
楕円面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$



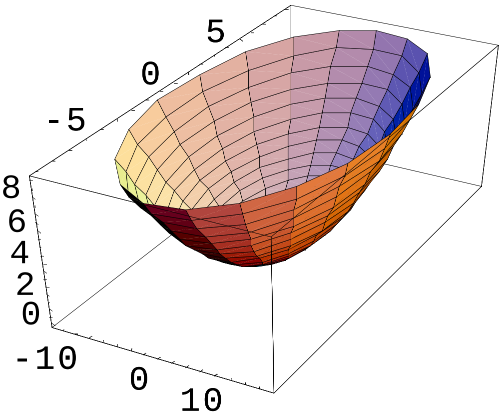
一葉双曲面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$



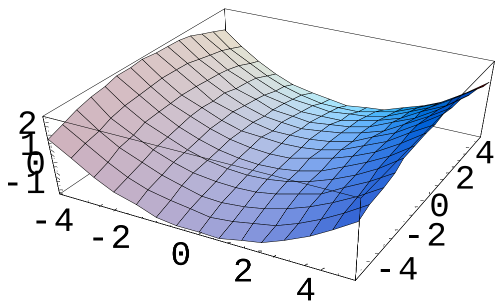
二葉双曲面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=-1$



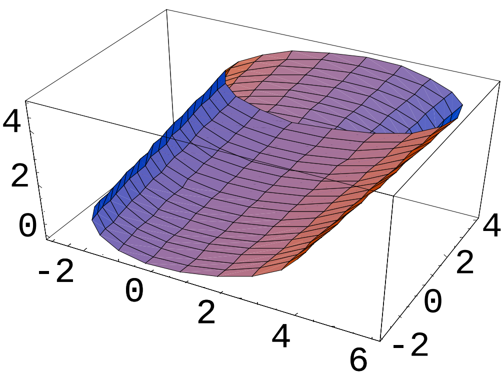
楕円放物面　$z=\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}$



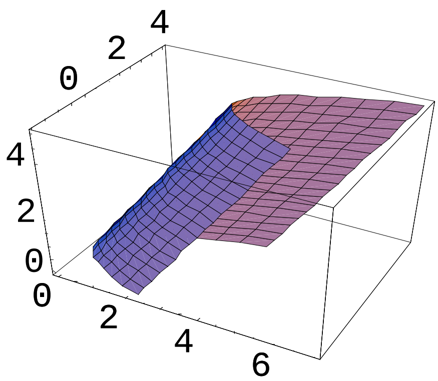
双曲放物面　$z=\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}$



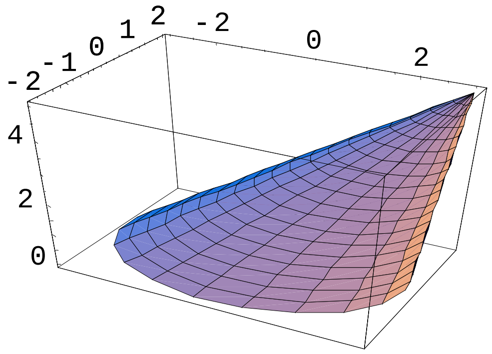
楕円柱面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\quad p=(3,2,5)$

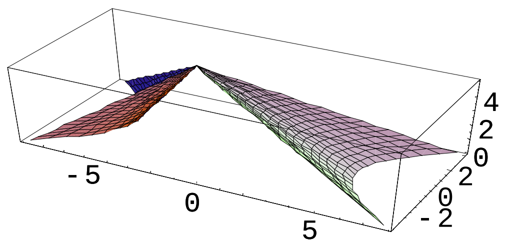


放物柱面　$y=x^2,\ p=(3,2,5)$



楕円錐面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，P(3,2,5)　　　双曲柱面　$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$，P(-2,0,5)





練習問題 4.4

(1) 次の２次形式の標準形を求めよ．

　① $x^2-6xy+y^2$

　② $x^2-y^2+z^2-2yz-2xy$

(2)　次の２次曲線はどんな図形を表すか．

　① $x^2-6xy+y^2+3x-4y=10$

　② $x^2-2xy+y^2+5x-3y-2=0$

(3)　次の２次曲面はどんな図形を表すか．

　① $x^2-y^2+z^2-2yz-2xy-2x+2y-2z-5=0$

　② $x^2-2xy-2xz+x-y+z+1=0$